

Université Paris Sud

**Notions sur le modèle standard :
du lagrangien au mécanisme de Higgs**

Elias KHAN
Institut Universitaire de France
Institut de Physique Nucléaire - Orsay
IN2P3 - CNRS

Avant-Propos

L'objectif de ce cours est d'aborder des notions de base en physique subatomique théorique. En effet la principale difficulté dans ce domaine ne réside en fait pas dans le formalisme mais plutôt dans la hiérarchie et la présentation des idées, les domaines de validité des approximations etc., parfois masqués par un lourd formalisme.

Le présent (et bref) cours vise donc à introduire les notions sur les particules virtuelles, diagrammes de Feynman, Lagrangiens, médiateurs d'interaction, symétries globales et locales de jauge, mécanismes de Goldstone et de Higgs. Il est complémentaire d'un cours de théorie quantique des champs, souvent volumineux, qui rend difficile l'appréhension des idées essentielles.

Une approche plus détaillée pourra se trouver dans le "Quark et Leptons" de F. Halzen et A.D. Martin. Je remercie enfin Jean-Paul Ebran pour sa relecture efficace et ses commentaires toujours utiles.

Index

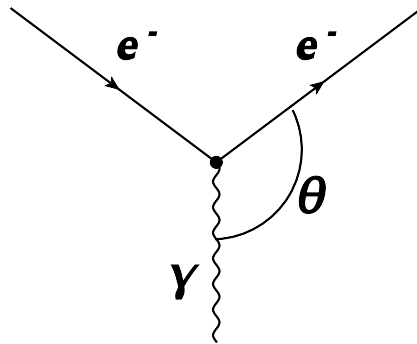
1	Particules et médiateurs d'interaction	2
1.1	Particule virtuelle	2
1.2	Lagrangien d'un médiateur d'une interaction	3
2	Diagrammes de Feynman et renormalisation	6
3	Brisure spontanée de symétrie de jauge globale et mécanisme de Goldstone	8
4	Invariance de jauge locale et interaction	11
5	Brisure spontanée de symétrie de jauge locale et mécanisme de Higgs	13
6	Le lagrangien du modèle standard	15
6.1	Termes (6.1) : énergie cinétique des médiateurs de l'interaction électrofaible	15
6.2	Termes (6.2) : énergie cinétique des quarks et leptons et couplages aux médiateurs de l'interaction électrofaible	16
6.3	Termes (6.3) : le potentiel et le champs de Higgs	16
6.4	Termes (6.4) : le lagrangien de l'interaction forte	17

Chapitre 1

Particules et médiateurs d'interaction

1.1 Particule virtuelle

Considérons un morceau de diagramme de Feynman qui consiste en l'émission d'un photon par un électron :



La conservation du quadrivecteur énergie-impulsion donne

$$e^- \rightarrow e^- + \gamma \quad (1.1)$$

$$E_e = E'_e + E_\gamma \quad (1.2)$$

$$\vec{p}_e = \vec{p}'_e + \vec{p}_\gamma \quad (1.3)$$

On en déduit (on omet le facteur c , qu'on peut retrouver avec les équations aux dimensions).

$$m_e^2 = E_e^2 - p_e^2 = E_e'^2 + E_\gamma^2 + 2E'_e E_\gamma - p_e'^2 - p_\gamma^2 - 2p'_e p_\gamma \cos\theta \quad (1.4)$$

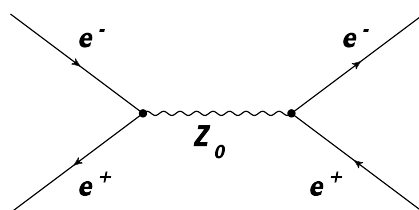
$$= m_e^2 + 2E'_e E_\gamma - 2p'_e p_\gamma \cos\theta \quad (1.5)$$

d'où

$$\cos\theta = \frac{E'_e}{p'_e} = \frac{\sqrt{p_e'^2 + m_e^2}}{p'_e} > 1 \quad (1.6)$$

Le quadrivecteur énergie-impulsion n'est donc pas conservé à ce vertex (point de réaction d'un diagramme de Feynman). Le photon est ici une particule virtuelle, ce qui montre qu'en général les

propagateurs dans les diagrammes de Feynman ne correspondent pas à une particule réelle. Ce sont juste des moyens de calculer une amplitude de probabilité d'une réaction dans une approche perturbative. De manière générale, si une particule de masse m quelconque est virtuelle, alors elle vérifie $E^2 \neq p^2c^2 + m^2c^4$, ce qui permet de continuer d'appliquer la conservation du quadrivecteur énergie-impulsion. On dit alors que la particule n'est pas sur sa couche de masse. Intuitivement elle peut emprunter une énergie ΔE pendant un temps Δt avant d'être absorbée par l'autre partie du diagramme de Feynman. Une particule virtuelle est donc toujours émise puis absorbée, elle ne peut donc pas être détectée. Une particule réelle peut être considérée comme un cas particulier de particule virtuelle qui est sur sa couche de masse. Elle peut intervenir par exemple comme une résonance Z_0 produite par annihilation e^+e^- qui se désintègre ensuite en e^+e^- :



1.2 Lagrangien d'un médiateur d'une interaction

Comme dans les autres domaines de physique, le principe général est d'obtenir l'équation du mouvement (équation d'Euler-Lagrange) à partir du Lagrangien. Il faut simplement y ajouter la contrainte que Lagrangien et équation du mouvement doivent être invariants sous une transformation de Lorentz (les lois physiques sont les mêmes dans deux référentiels en translation l'un par rapport à l'autre, c'est le principe de la relativité restreinte). Ceci implique que les 4 coordonnées d'espace-temps sont liées entre elles, et on considère l'indice $\mu \hat{=} 0, 1, 2, \text{ ou } 3$ correspondant respectivement aux coordonnées t, x, y, z . Si ϕ est le champ (la fonction d'onde en première approximation) du médiateur, l'équation d'Euler-Lagrange (EL) s'écrit :

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0 \quad (1.7)$$

où ∂_μ signifie donc

$$\partial_\mu \hat{=} (\partial_t; \vec{\nabla}) \quad (1.8)$$

Dans une transformée de Lorentz, des signes opposés apparaissent entre les composantes spatiales et temporelle. Cela se traduit par la dérivée avec l'indice en haut :

$$\partial^\mu \hat{=} (\partial_t; -\vec{\nabla}) \quad (1.9)$$

où l'on notera le signe négatif pour les composantes spatiales. Par ailleurs la répétition des indices

μ dans l'équation 1.7 est une notation abrégée signifiant la somme sur ces indices. Ainsi :

$$\partial_\mu \partial^\mu \hat{=} \sum_{\mu=0}^3 \partial_\mu \partial^\mu \quad (1.10)$$

$$= \partial_t^2 - \Delta \hat{=} \square \quad (1.11)$$

La matrice faisant monter ou descendre les indices est donc la matrice 4x4 de métrique d'espace-temps :

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (1.12)$$

C'est la métrique dite de Minkowski, qui découle du principe de relativité restreinte (transformation de Lorentz). On a bien :

$$\partial_\mu g^{\mu\nu} = \partial^\nu \quad (1.13)$$

Remarquons que la relativité générale consiste à exprimer l'effet de la masse/énergie sur la métrique d'espace-temps. $g^{\mu\nu}$ est alors modifié et c'est justement l'équation d'Einstein qui permet d'en calculer son expression à partir de l'énergie-impulsion de l'objet déformant l'espace-temps. Reffermons la parenthèse.

Quel est donc le Lagangien qui donne lieu à un médiateur ϕ (de masse m dans le cas général) ?

Considérons

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi) - \frac{1}{2}m^2 \phi^2 \quad (1.14)$$

Il s'agit d'un scalaire de Lorentz (pas de dépendance d'indice d'espace-temps), ce qui permet au lagrangien de respecter le principe de relativité restreinte. Montrons que l'équation d'Euler-Lagrange correspondante mène à l'équation du mouvement d'un propagateur de masse m . Le premier terme de 1.7 donne (on fera attention aux indices muets μ, σ et non-muet ν) :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu \phi)} = \frac{1}{2}(\delta_\mu^\nu \partial^\mu \phi + g^{\mu\sigma} \delta_\sigma^\nu \partial_\mu \phi) \quad (1.15)$$

$$= \frac{1}{2}(\partial^\nu \phi + \partial^\nu \phi) = \partial^\nu \phi \quad (1.16)$$

où l'on a utilisé le fait que (propriété des dérivées fonctionnelles)

$$\frac{\partial(\partial_\mu \phi)}{\partial(\partial_\nu \phi)} = \delta_\mu^\nu \quad (1.17)$$

avec δ , le delta de Krönecker. L'ensemble des termes de l'équation d'EL 1.7 donne donc :

$$\partial_\nu \partial^\nu \phi + m^2 \phi = 0 \quad (1.18)$$

$$(\square + m^2)\phi = 0 \quad (1.19)$$

C'est l'équation du mouvement de Klein-Gordon qui décrit un médiateur de masse m . La fonction d'onde du médiateur obtenue en résolvant l'équation 1.19 est un potentiel de Yukawa.

De manière analogue, une particule de spin 1/2, comme un électron, représentée par un spineur de Dirac ψ , est décrite par un Lagrangien (scalaire lui aussi bien sûr)

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}\gamma_{\mu}\partial^{\mu}\psi - m\bar{\psi}\psi \quad (1.20)$$

où γ_{μ} est une matrice dite de Dirac (reliée aux matrices de Pauli) et $\bar{\psi} \hat{=} \psi^{\dagger}\gamma^0$. L'équation de EL correspondante aboutit à

$$(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu} - m)\psi = 0 \quad (1.21)$$

C'est l'équation de Dirac, qui correspond à une équation de Schrödinger qui tient compte du principe de relativité restreinte.

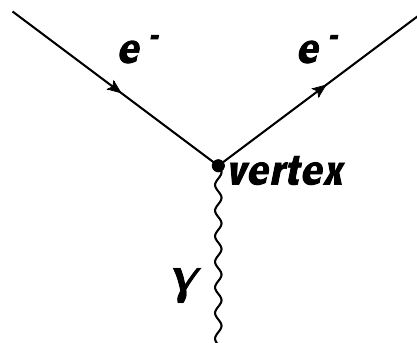
Chapitre 2

Diagrammes de Feynman et renormalisation

Un lagrangien contient ainsi des termes qui vont représenter la propagation de diverses particules (ou champs) comme dans 1.14 : $\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi$ ou $\bar{\psi}\psi$, etc. Ils sont représentés par une propagation à une ligne :



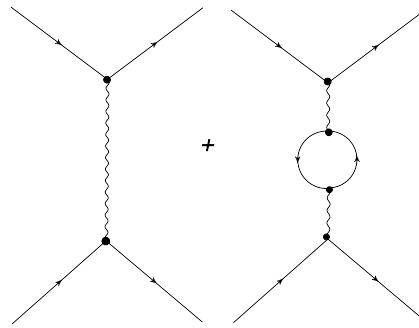
De manière analogue, l'interaction entre deux particules, comme par exemple un électron représenté par le spineur ψ et un photon représenté par le vecteur A^μ , est décrite dans le lagrangien par un terme en $e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu$, où e est la constante de couplage de l'interaction impliquée. Le morceau de diagramme de Feynman correspondant est :



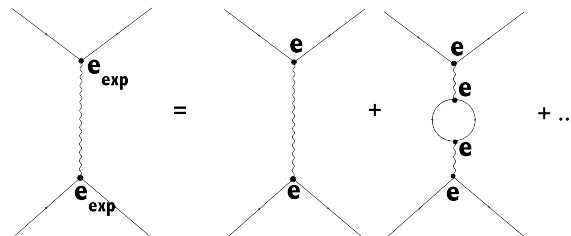
où le point d'interaction est appelé vertex.

Les diagrammes de Feynman sont une représentation graphique d'une série perturbative permettant de calculer la probabilité de transition entre un état initial et un état final (réaction). Cela permet de s'affranchir de la solution exacte de l'équation d'EL par l'écriture des termes successifs, à partir du lagrangien, en diagrammes avec un nombre croissants de vertex (voir la figure ci-dessous).

Dans ce développement deux problèmes se posent : i) les diagrammes en boucle comme le



deuxième ci-dessus donne une valeur infinie lorsque sa contribution est calculée. Notons que les termes suivants divergent aussi, avec des signes opposés si bien que la série de diagrammes peut dans le principe avoir une valeur finie ($+\infty - \infty = ?$). Mais des divergences apparaissent bien pour un diagramme donné. ii) les constantes de couplage aux vertex ne peuvent pas correspondre aux constantes de couplages expérimentales des interactions, comme la charge électrique élémentaire. En effet, comment alors justifier un développement en $e^2 + e^4$, etc. si e était la constante de couplage expérimentale de l'interaction ? La renormalisation permet de régler ces deux problèmes d'un coup. Il s'agit en fait d'un changement de variable plutôt que d'une renormalisation : c'est la série totale de diagrammes de Feynman qui correspond à la véritable interaction avec une constante de couplage e_{exp} , pouvant être comparée à l'expérience :



La constante de couplage e intervenant dans chaque vertex des diagrammes de Feynman n'est donc pas la même que e_{exp} . En inversant la procédure, on exprime les diagrammes avec les vertex en e en fonction des diagrammes avec les vertex en e_{exp} . Ceux-ci sont forcément finis (sans divergence) car ils sont comparables à l'expérience. Ce changement de variable permet donc d'éliminer les divergences et de clarifier le rôle des constantes de couplages : c'est la renormalisation. Une conséquence de cette procédure est que e_{exp} acquiert une dépendance en fonction de l'énergie échangée : cette dépendance en énergie des constantes de couplage indique par exemple des régimes d'unification entre différentes interactions à haute énergie.

Chapitre 3

Brisure spontanée de symétrie de jauge globale et mécanisme de Goldstone

Montrons qu'une brisure spontanée de symétrie de jauge globale (aussi appelée symétrie interne) génère une particule de masse nulle, le boson de Goldstone. On pourra en première approximation considérer ϕ comme la fonction d'onde (complexe) de la particule concernée.

Considérons un champ (particule) ϕ soumis au lagrangien

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu \phi)^* (\partial^\mu \phi) - \mu^2 \phi^* \phi - \lambda (\phi^* \phi)^2 \quad (3.1)$$

$$= T - V(\phi) \quad (3.2)$$

avec $\lambda > 0$ et $\mu^2 < 0$. Cette dernière condition fait du terme en $\mu^2 \phi^* \phi$ un terme différent d'un terme de masse : il faudrait $\mu^2 > 0$ pour donner une contribution identique à un terme de masse comme dans 1.14. Notons que le lagrangien 3.1 est bien invariant sous une transformation de jauge globale : le champ $\phi' \hat{=} e^{i\alpha} \phi$ (où α est un scalaire) obéit au même lagrangien quand on remplace ϕ par son expression en fonction de ϕ' dans le lagrangien 3.1.

Analysons la forme du potentiel $V(\phi)$ auquel est soumis la particule ϕ :

$$V(\phi) = \mu^2 |\phi|^2 + \lambda |\phi|^4 \quad (3.3)$$

Pour décrire l'allure de $V(\phi)$ on peut préciser ses limites : quand $|\phi| \rightarrow 0$, $V(\phi) \rightarrow -|\phi|^2$ et quand $|\phi| \rightarrow \infty$, $V(\phi) \rightarrow +|\phi|^4$. La courbe passe donc par un minimum que l'on peut calculer :

$$V'(\phi) = 0 \quad (3.4)$$

$$2\mu^2 |\phi| + 4\lambda |\phi|^3 = 0 \quad (3.5)$$

$$|\phi| = \frac{-\mu^2}{2\lambda} \hat{=} \frac{\nu^2}{2} \quad (3.6)$$

avec

$$\nu^2 \hat{=} \frac{-\mu^2}{\lambda} > 0 \quad (3.7)$$

Le minimum du potentiel se trouve donc en $|\phi| = \nu/\sqrt{2}$:

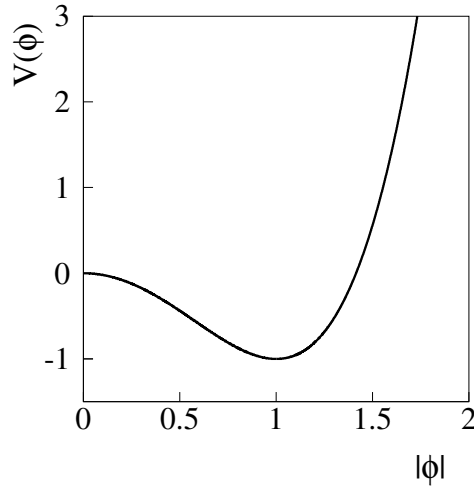


FIGURE 3.1 – Potentiel (3.3) avec $\mu^2=-2$ et $\lambda=1$ en fonction du module de ϕ . On vérifiera avec 3.7 que le minimum du potentiel se trouve en $|\phi| = \nu/\sqrt{2}=1$.

Ce potentiel, qui ne dépend que du module de ϕ , a donc une forme de chapeau mexicain dans le plan complexe décrit par ϕ : il est invariant de la phase de ϕ , c'est à dire invariant par rotation dans le plan complexe. Une solution $|\phi|$ de ce potentiel va se trouver au voisinage du minimum, ce qui brise l'invariance par rotation respectée par le potentiel. Il s'agit donc d'une brisure spontanée de symétrie (le potentiel respecte une symétrie mais pas sa solution). Afin d'évaluer les conséquences de la brisure spontanée de symétrie, écrivons l'expression du lagrangien au voisinage de son minimum (ici x est une notation abrégée pour $\{t,x,y,z\}$) :

$$\phi(x) \simeq \frac{1}{\sqrt{2}}(\nu + \eta(x) + i\epsilon(x)) \quad (3.8)$$

où η et ϵ sont des petites perturbations des parties réelle et imaginaire de la fonction d'onde autour du minimum. Gardons en mémoire qu'à contrario, ν ne dépend pas de x (minimum du potentiel).

L'effet de la brisure spontanée de la symétrie s'évalue en exprimant le lagrangien au voisinage du minimum, et en analysant les termes qui en découlent. On remplace donc 3.8 dans 3.1 :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \eta)^*(\partial^\mu \eta) + \frac{1}{2}(\partial_\mu \epsilon)^*(\partial^\mu \epsilon) - \frac{1}{2}\mu^2((\eta + \nu)^2 + \epsilon^2) - \frac{\lambda}{4}((\eta + \nu)^2 + \epsilon^2)^2 \quad (3.9)$$

Les termes en η^2 et ϵ^2 sont susceptibles d'être des particules éventuellement massiques (cf eq. 1.14). Les deux derniers termes de 3.9 donnent en η^2 :

$$-\frac{1}{2}\mu^2\eta^2 - \frac{\lambda}{2}\nu^2\eta^2 - \lambda\nu^2\eta^2 = -\frac{1}{2}\mu^2\eta^2 + \frac{1}{2}\mu^2\eta^2 + \mu^2\eta^2 \quad (3.10)$$

$$= -\frac{1}{2}m_\eta^2\eta^2 \quad (3.11)$$

où l'on a utilisé 3.7 et avec $m_\eta \hat{=} \sqrt{-2\mu^2}$, qui est bien défini car $\mu^2 < 0$. η représente donc un champ massique (cf eq 1.14) généré par la brisure spontanée de la symétrie de jauge globale. Pour le terme en ϵ^2 on obtient de même :

$$-\frac{1}{2}\mu^2\epsilon^2 - \frac{\lambda}{2}\nu^2\epsilon^2 = -\frac{1}{2}\mu^2\epsilon^2 + \frac{1}{2}\mu^2\epsilon^2 \quad (3.12)$$

$$= 0 \quad (3.13)$$

$$= -\frac{1}{2}m_\epsilon^2\epsilon^2 \quad (3.14)$$

avec $m_\epsilon=0$. La brisure spontanée de symétrie de jauge globale génère donc aussi un champ de masse nulle : le boson de Goldstone. Il correspond intuitivement à une rotation au fond du chapeau mexicain, qui ne coûte pas d'énergie, passant d'une solution à l'autre.

Cependant toute cette description n'a d'utilité que de nous familiariser avec ces mécanismes. En effet le lagrangien de départ 3.1 doit être invariant de symétrie de jauge locale pour contenir les interactions, ce qui est le cas dans la nature, mais pas dans 3.1. Cherchons donc un lagrangien plus proche de la nature.

Chapitre 4

Invariance de jauge locale et interaction

Le moyen de générer une interaction est d'imposer l'invariance du lagrangien sous une symétrie de jauge locale (ici de type $U(1)$) :

$$\phi' \hat{=} e^{i\alpha(x)} \phi \quad (4.1)$$

ϕ et ϕ' doivent obéir à des lagrangiens similaires. Ici la phase de la transformation dépend des coordonnées d'espace-temps, contrairement à la transformation de jauge globale du chapitre précédent. Ainsi le lagrangien 3.1 n'est pas invariant sous la transformation 4.1 à cause des termes dérivatifs en ∂_μ , alors qu'il l'est sous une transformation de jauge globale.

Montrons que le terme suivant de lagrangien est quant à lui invariant sous une transformation de jauge locale (ceci est analogue à la démonstration faite en cours avec l'équation de Schrödinger) :

$$\mathcal{L} = (D_\mu \phi)^* (D^\mu \phi) \quad (4.2)$$

avec

$$D_\mu \hat{=} \partial_\mu - ieA_\mu \quad (4.3)$$

où A_μ est le potentiel vecteur décrivant une interaction avec la constante de couplage e . L'existence de ce terme d'interaction est nécessaire à l'invariance de jauge locale du lagrangien. En effet, 4.1 et 4.3 donnent :

$$D_\mu \phi = (\partial_\mu - ieA_\mu) e^{-i\alpha(x)} \phi' \quad (4.4)$$

$$= e^{-i\alpha} \partial_\mu \phi' + \phi' e^{-i\alpha} (-i\partial_\mu \alpha) - ieA_\mu e^{-i\alpha} \phi' \quad (4.5)$$

$$= e^{-i\alpha} (\partial_\mu - i(\partial_\mu \alpha) - ieA_\mu) \phi' \quad (4.6)$$

En imposant au vecteur d'interaction de se transformer comme

$$A'_\mu = A_\mu + \frac{1}{e} \partial_\mu \alpha \quad (4.7)$$

on compense le terme supplémentaire du lagrangien et 4.6 devient, en remplaçant A_μ par son expression en fonction de A'_μ ,

$$D_\mu \phi = e^{-i\alpha} (\partial_\mu - i(\partial_\mu \alpha) - ieA'_\mu + i(\partial_\mu \alpha)) \phi' \quad (4.8)$$

$$= e^{-i\alpha} D'_\mu \phi' \quad (4.9)$$

avec

$$D'_\mu \hat{=} \partial_\mu - ieA'_\mu \quad (4.10)$$

Le terme de lagrangien 4.2 est donc invariant de jauge locale car le facteur $e^{-i\alpha}$ de D_μ (Eq. 4.9) s'annule avec le facteur $e^{+i\alpha}$ de D^μ :

$$\mathcal{L} = (D_\mu \phi)^* (D^\mu \phi) = (D'_\mu \phi')^* (D'^\mu \phi') \quad (4.11)$$

L'invariance de jauge locale est vérifiée.

Quelques remarques :

i) Le potentiel vecteur d'interaction A_μ ainsi généré permet d'ajouter des termes d'interaction correspondant avec ϕ dans le lagrangien : $e^2 A^\mu A_\mu \phi^* \phi$ qui sont bien invariants de jauge locale sous la transformation 4.1.

ii) A_μ doit être un médiateur de masse nulle. En effet un terme de masse dans un lagrangien pour un potentiel vecteur s'écrit $+\frac{1}{2}m^2 A^\mu A_\mu$. En remplaçant A^μ par sa valeur de transformation de jauge 4.7, vont apparaître, dans le lagrangien 4.2, des termes supplémentaires en $m^2 \partial_\mu \alpha$, etc. Il n'y a donc pas d'invariance de jauge : un terme de masse du potentiel d'interaction brise explicitement (i.e. dans le lagrangien) l'invariance de jauge locale. Il est donc nécessaire d'avoir des médiateurs de masse nulle : $m_A=0$. Ce mécanisme convient donc pour générer l'interaction forte dont les médiateurs (les gluons) sont bien de masse nulle, mais pas pour l'interaction électrofaible donc certains médiateurs, comme le Z^0 , ont une masse de l'ordre de 100 GeV.

iii) A_μ a une énergie cinétique qui conduit à l'ajout de termes dans le lagrangien :

$$-\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \quad (4.12)$$

avec

$$F_{\mu\nu} \hat{=} \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (4.13)$$

En injectant 4.7 on voit que 4.13 est bien invariant de jauge locale.

Mais comment générer de la masse à un médiateur d'une interaction ?

Chapitre 5

Brisure spontanée de symétrie de jauge locale et mécanisme de Higgs

Le mécanisme de Higgs est une conséquence de la brisure spontanée de la symétrie de jauge locale. Il permet de générer une masse pour le médiateur de l'interaction, et s'applique donc au cas de l'interaction électrofaible. Le lagrangien invariant de jauge locale incorporant un potentiel générant une brisure spontanée de symétrie s'écrit donc (on utilise de concert 3.1, 4.2 et 4.12) :

$$\mathcal{L} = (D_\mu \phi)^* (D^\mu \phi) - \mu^2 \phi^* \phi - \lambda (\phi^* \phi)^2 - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \quad (5.1)$$

avec $\lambda > 0$ et $\mu^2 < 0$ et

$$D_\mu \hat{=} \partial_\mu - ieA_\mu \quad (5.2)$$

Le champ ϕ , donnant naissance au Higgs, va permettre de générer une masse à l'interaction A_μ . De manière analogue au chapitre 3, on se place au voisinage du minimum du potentiel $V(\phi)$ pour en déduire l'effet de la brisure spontanée de symétrie. Montrons que ce champ ϕ peut s'approximer par :

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\nu + \eta(x) + i\epsilon(x)) \quad (5.3)$$

$$\simeq \frac{1}{\sqrt{2}}(\nu + \eta(x))e^{\frac{i\epsilon(x)}{\nu}} \quad (5.4)$$

En effet on a, en ne considérant que les termes au premier ordre autour du minimum $(\nu, 0)$:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(\nu + \eta)e^{\frac{i\epsilon}{\nu}} \simeq \frac{1}{\sqrt{2}}(\nu + \eta)\left(1 + \frac{i\epsilon(x)}{\nu}\right) \quad (5.5)$$

$$\simeq \frac{1}{\sqrt{2}}(\nu + \eta + i\epsilon) \quad (5.6)$$

ce qui donne bien la relation 5.4. Cette relation montre que le champ de masse nulle $\epsilon(x)$ (le boson de Goldstone du chapitre 3) se réécrit comme une phase locale (comparer 5.4 et 4.1). Le Lagrangien 5.1 étant invariant de jauge locale, le champ de Goldstone $\epsilon(x)$ disparaît donc : les résultats ne vont pas dépendre de $\epsilon(x)$. On peut s'en convaincre en remplaçant 5.4 dans 5.1 : le

résultat sera indépendant de $\epsilon(x)$. Qu'advient-il des deux champs restants : η et A_μ ? Au voisinage du minimum du potentiel, celui-ci s'écrit :

$$-\mu^2 \phi^* \phi - \lambda (\phi^* \phi)^2 = -\frac{1}{2} \mu^2 (\nu + \eta)^2 - \frac{\lambda}{4} (\nu + \eta)^4 \quad (5.7)$$

Le boson de Goldstone ϵ a bel et bien disparu. Ceci est en accord avec l'expérience, qui n'observe pas de boson de Goldstone de masse nulle.

De manière analogue au chapitre 3, analysons les termes en η^2 de 5.7, qui sont ceux susceptibles de donner une masse au champ η . On obtient (en utilisant 3.7) :

$$-\frac{1}{2} \mu^2 \eta^2 - \frac{\lambda}{4} (6\nu^2 \eta^2) = -\frac{1}{2} \mu^2 \eta^2 + \frac{3}{2} \mu^2 \eta^2 \quad (5.8)$$

$$= \mu^2 \eta^2 \quad (5.9)$$

$$= -\frac{1}{2} m_\eta^2 \eta^2 \quad (5.10)$$

avec $m_\eta \hat{=} \sqrt{-2\mu^2}$, qui est bien défini car $\mu^2 < 0$. On obtient donc un champ massif η appelé le boson de Higgs.

Qu'en est-il de l'interaction A_μ ? Le premier terme du lagrangien 5.1 donne un terme en (cf 5.2) :

$$ieA^\mu \phi^* (-ieA_\mu) \phi = \frac{e^2}{2} (\nu + \eta)^2 A^\mu A_\mu \quad (5.11)$$

$$= \frac{e^2}{2} \nu^2 A^\mu A_\mu + \frac{e^2}{2} \eta^2 A^\mu A_\mu + e^2 \nu \eta A^\mu A_\mu \quad (5.12)$$

Le premier terme du membre de droite de l'équation ci-dessus peut se réécrire sous la forme :

$$\frac{e^2}{2} \nu^2 A^\mu A_\mu = \frac{1}{2} m_A^2 A^\mu A_\mu \quad (5.13)$$

avec

$$m_A \hat{=} e\nu \quad (5.14)$$

$$= e \cdot \sqrt{\frac{-\mu^2}{\lambda}} > 0 \quad (5.15)$$

Le boson de Higgs permet donc de donner une masse non nulle au médiateur A_μ de l'interaction tout en respectant l'invariance de jauge locale au niveau du lagrangien.

Remarques :

i) Les termes en $\eta^3, \eta^4, \eta^2 A^\mu A_\mu$ qui sont générés lors de ces dérivations donnent lieu à des couplages du Higgs avec lui-même, ou avec le médiateur de l'interaction etc.

ii) En résumé, le mécanisme de Higgs contient 3 effets : a) Suppression du boson de Goldstone. b) Génération d'un boson de Higgs massif. c) Masse non nulle du médiateur de l'interaction.

iii) Quantitativement les masses m_η et m_A dépendent des paramètres μ et λ du potentiel de Higgs. Il n'est donc pas possible de prédire la valeur de la masse du Higgs, connaissant uniquement celle du médiateur A_μ .

Chapitre 6

Le lagrangien du modèle standard

Il s'écrit

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}\vec{W}_{\mu\nu}\vec{W}^{\mu\nu} - \frac{1}{4}B_{\mu\nu}B^{\mu\nu} \quad (6.1)$$

$$+ \bar{L}\gamma^\mu D_\mu L + \bar{R}\gamma^\mu D'_\mu R \quad (6.2)$$

$$+ (D_\mu\phi)^*(D^\mu\phi) - V(\phi) - (c_1\bar{L}\phi R - c_2\bar{L}\phi_c R + h.c.) \quad (6.3)$$

$$+ -\frac{1}{4}G_{\mu\nu}^a G_a^{\mu\nu} + \bar{q}(\gamma^\mu D''_\mu - m)q \quad (6.4)$$

avec les dérivées, invariantes de jauge locale, qui contiennent les médiateurs des interactions :

$$D_\mu \hat{=} i\partial_\mu - \frac{g}{2}\vec{\tau}\cdot\vec{W}_\mu - g'\frac{Y}{2}B_\mu \quad (6.5)$$

$$D'_\mu \hat{=} i\partial_\mu - g'\frac{Y}{2}B_\mu \quad (6.6)$$

$$D''_\mu \hat{=} i\partial_\mu - g_s T_a G_\mu^a \quad (6.7)$$

6.1 Termes (6.1) : énergie cinétique des médiateurs de l'interaction électrofaible

On reconnaît dans 6.5 les constantes de couplages respectives d'isospin faible et d'hypercharge faible g et g' . Il s'agit des invariances de jauge $SU(2)_\tau$ et $U(1)_Y$ qui génèrent donc $(2^2-1)+1=3+1$ médiateurs de l'interaction électrofaible : les $W^{+,-,0}$ et le B^0 . Notons que $\vec{\tau}$ est donc l'analogue d'une matrice de Pauli mais dans l'espace d'isospin faible. Les termes d'énergie cinétique 6.1 de ces 4 médiateurs utilisent les définitions

$$B_{\mu\nu} \hat{=} \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu \quad (6.8)$$

$$\vec{W}_{\mu\nu} \hat{=} \partial_\mu \vec{W}_\nu - \partial_\nu \vec{W}_\mu \quad (6.9)$$

$$\vec{W}_\mu \hat{=} (W_\mu^-, W_\mu^0, W_\mu^+) \quad (6.10)$$

Remarque : le B^0 et le W^0 ayant mêmes nombres quantiques, les médiateurs expérimentalement observés (le photon et le Z^0) sont une superposition de ces deux états :

$$|\gamma\rangle \hat{=} \cos\theta_W |B^0\rangle + \sin\theta_W |W^0\rangle \quad (6.11)$$

$$|Z^0\rangle \hat{=} \sin\theta_W |B^0\rangle - \cos\theta_W |W^0\rangle \quad (6.12)$$

où θ_W est l'angle de mélange de Weinberg déterminé expérimentalement à $\sin^2\theta_W=0.232$

6.2 Termes (6.2) : énergie cinétique des quarks et leptons et couplages aux médiateurs de l'interaction électrofaible

Dans 6.2 on a les doublets SU(2) d'isospin faible de chiralité (hélicité) gauche et les singulets de chiralité droite :

$$L \hat{=} \begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ e_L^- \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix} \quad (6.13)$$

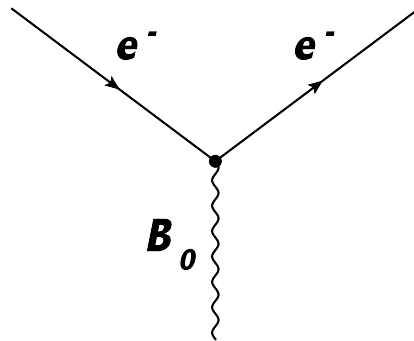
à multiplier par les 3 familles de quarks et de leptons.

De même on décline en 3 familles :

$$R \hat{=} e_R^- \text{ ou } \begin{pmatrix} u_R \\ d_R \end{pmatrix} \quad (6.14)$$

puisque le neutrino d'hélicité droite n'existe pas.

Le terme 6.2 du lagrangien génère des vertex à 3 pattes impliquant les quarks (ou leptons) et les médiateurs des interactions. Par exemple $g'e^-B^0e^-$ est représenté par



6.3 Termes (6.3) : le potentiel et le champs de Higgs

Ces termes sont ajoutés au Lagrangien pour permettre de donner une masse aux médiateurs de l'interaction électrofaible. ϕ est le champs de Higgs. Le terme en $(D_\mu\phi)^*(D^\mu\phi)$ génère les masses des médiateurs et leur couplage au Higgs, comme au chapitre 5. De même $V(\phi)$ est le potentiel qui brise spontanément les invariances de jauge. Il présente a priori une forme de chapeau mexicain, et dépend de deux paramètres μ et λ :

$$V(\phi) \hat{=} \mu^2 \phi^* \phi + \lambda (\phi^* \phi)^2 \quad (6.15)$$

avec $\lambda > 0$ et $\mu^2 < 0$

Le dernier terme de 6.3 représente le couplage entre le boson de Higgs et les quarks et leptons via les constantes c_1 et c_2 , afin de leur donner une masse. En effet des termes directs de masses de quarks et de leptons briseraient explicitement (i.e. dans le lagrangien) l'invariance de jauge locale en raison de l'asymétrie entre le doublet 6.13 et le singulet 6.14. Les termes 6.3 du lagrangien seront mieux contraints avec des informations expérimentales sur le boson de Higgs.

6.4 Termes (6.4) : le lagrangien de l'interaction forte

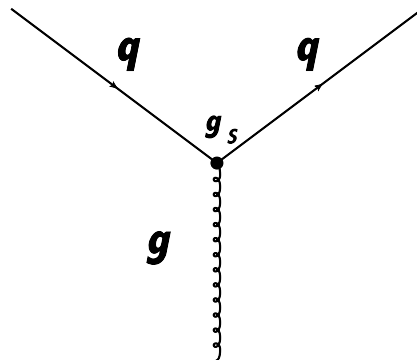
Le Lagrangien de l'interaction forte (Quantum Chromodynamics, QCD) présente un premier terme d'énergie cinétique des gluons du type

$$G_{\mu\nu}^a \hat{=} \partial_\mu G_\nu^a - \partial_\nu G_\mu^a - g_s f_{abc} G_\mu^b G_\nu^c \quad (6.16)$$

où $G_\mu^{a=1,8}$ sont les 8 champs de gluons vecteurs. Le dernier terme de 6.16 représente l'interaction des gluons entre eux, avec la constante de couplage de QCD. Ceci est spécifique à l'interaction forte, et conduit à des séries non-perturbatives des diagrammes de Feynman, et au comportement particulier de QCD en fonction de l'énergie (liberté asymptotique, confinement). Mathématiquement cela s'exprime par le caractère non-abélien du groupe $SU(3)_{Couleur}$ et f_{abc} est une matrice $8 \times 8 \times 8$ antisymétrique qui en découle.

Le dernier terme de 6.4 inclut l'invariance de jauge locale $SU(3)_{Couleur}$ via la dérivée 6.7. q sont les champs de quarks (à décliner en 6 versions), $T_{a=1,8}$ les générateurs de $SU(3)_{Couleur}$ associés aux 8 champs de gluons vecteurs G_μ^a . Ce terme génère aussi le couplage entre les quarks et les gluons avec la constante de couplage d'interaction forte g_s , comme on peut le vérifier.

On a ainsi un terme en vertex :



Notons que la masse m des quarks est en fait générée par les champs de Higgs dans la brisure spontanée de la symétrie électrofaible.